Matrices

Definición:
Un conjunto de n números dispuestos en n filas y m columnas, tal que n * m = N es una matriz.
Una matriz se suele representar por una letra mayúscula y los elementos de dicha matriz se representan por la correspondiente letra minúscula con dos subíndices que indican la fila y columna.

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: *Denominamos una matriz A, el elemento a_{12} es el numero que se encuentra en la fila 1 y la columna 2.*

Observaciones: - Dos matrices son **iguales** si tienen la misma dimensión y si los componentes correspondientes son iguales.
-Llamamos **submatriz** de una matriz A a aquella resultante de eliminar en A algunas filas y/o columnas

Tipos de matrices:

Tipo de matriz	*Definición*	*Ejemplo*
FILA	*Aquella matriz que tiene una sola fila, siendo su orden* $1 \times n$	$A_{1x3} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \end{pmatrix}$
COLUMNA	*Aquella matriz que tiene una sola columna, siendo su orden* $m \times 1$	$A_{3x1} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$
RECTANGULAR	*Aquella matriz que tiene distinto número de filas que de columnas, siendo su orden* $m \times n$, $m \neq n$	$A_{3x4} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 5 & 7 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

TRASPUESTA	*Dada una matriz* A, *se llama traspuesta de* A *a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas. Se representa por* A^t ó A^T	Si es $A=(a_{ij})_{mxn}$ Su traspuesta es $A^t=(a_{ji})_{nxm}$ $A=\begin{pmatrix}1&2&5\\3&-4&7\end{pmatrix}$ $A^t=\begin{pmatrix}1&3\\2&-4\\5&7\end{pmatrix}$
OPUESTA	*La matriz opuesta de una dada es la que resulta de sustituir cada elemento por su opuesto. La opuesta de* A *es* -A.	$A=\begin{pmatrix}1&3\\5&-7\\-6&4\end{pmatrix}$, $-A=\begin{pmatrix}-1&-3\\-5&7\\6&-4\end{pmatrix}$
NULA	*Si todos sus elementos son cero. También se denomina matriz cero y se denota por* $0_{m\times n}$	$0_{3x4}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$
CUADRADA	*Aquella matriz que tiene igual número de filas que de columnas, m = n, diciéndose que la matriz es de* <u>*orden n*</u>. <u>Diagonal principal</u> : *son los elementos* a_{11} , a_{22} , …, a_{nn} <u>Diagonal secundaria</u> : *son los elementos* a_{ij} *con* $i+j=n+1$ <u>Traza</u> de una matriz cuadrada : *es la suma de los elementos de la diagonal principal* tr A.	Matriz cuadrada : $A_3=\begin{pmatrix}1&9&-6\\0&2&1\\-2&4&5\end{pmatrix}$ Diagonal principal: $A=\begin{pmatrix}5&1&5&-6\\1&2&0&3\\7&-3&4&11\\1&9&3&8\end{pmatrix}$ Diagonal secundaria : $A=\begin{pmatrix}5&1&5&-6\\1&2&0&3\\7&-3&4&11\\1&9&3&8\end{pmatrix}$
SIMÉTRICA	*Es una matriz cuadrada que es igual a su traspuesta.* $A=A^t$, $a_{ij}=a_{ji}$	$A_3=\begin{pmatrix}1&9&-6\\9&2&1\\-6&1&5\end{pmatrix}$

ANTISIMÉTRICA	*Es una matriz cuadrada que es igual a la opuesta de su traspuesta.* $A = -A^t$, $a_{ij} = -a_{ji}$ *Necesariamente* $a_{ii} = 0$	$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 9 & -6 \\ 9 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
DIAGONAL	*Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal*	$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
ESCALAR	*Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son iguales*	$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$
IDENTIDAD	*Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son iguales a* 1. *También se denomina matriz unidad.*	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
TRIANGULAR	*Es una matriz cuadrada que tiene todos los elementos por encima (por debajo) de la diagonal principal nulos.*	$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ T. superior $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ T. inferior
ORTOGONAL	*Una matriz ortogonal es necesariamente cuadrada e invertible:* $A^{-1} = A^T$ La inversa de una matriz ortogonal es una matriz ortogonal. El producto de dos	$A * A^T = A^T * A = I$ $\begin{pmatrix} a & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

	matrices ortogonales es una matriz ortogonal. El determinante de una matriz ortogonal vale +1 ó -1.	
NORMAL	*Una matriz es normal si conmuta con su traspuesta. Las matrices simétricas, antisimétricas u ortogonales son necesariamente normales.*	$A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ $A * A^T = A^T * A$
INVERSA	*Decimos que una matriz cuadrada* A *tiene inversa,* A-1, *si se verifica que :* $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$	$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Operaciones con matrices:

- **Suma de matrices**

Sea $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices m x n, entonces la suma de A y B es la matriz m x n, A + B dada por:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir que A + B es la matriz que se obtiene al sumar los componentes correspondientes de A y de B.

Propiedades:

- Asociativa : A + (B + C) = (A + B) + C
- Conmutativa : A + B = B + A
- Elemento neutro : (matriz cero $0_{m\times n}$) , 0 + A = A + 0 = A
- Elemento simétrico : (matriz opuesta -A) , A + (-A) = (-A) + A = 0

Ejemplo:

Sea $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Entonces $A+B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Observación: la suma de dos matrices solo se puede realizar cuando ambas matrices son del mismo tamaño.

- **Multiplicación de una matriz por un escalar:**

Si A = (a_{ij}) es una matriz de m x n y si λ es un escalar, entonces la matriz m x n, λA, esta dada por:

$$\lambda A=\lambda(a_{ij})=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- Asociativa: $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$
- Distributiva I: $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
- Distributiva II: $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
- Elemento Neutro de escalares: 1*A = A

Ejemplo:

Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

Entonces $2A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 8 & 12 \\ -4 & 6 & 10 & 14 \end{pmatrix}$

- **Multiplicación de matrices.**

La regla aquí es que el numero de columnas de la primera matriz sea igual al numero de filas de la segunda, esto es, que se puede hacer una multiplicación de una matriz 2x3 por una de 3x5, y la matriz resultante tiene el numero de filas de la primer matriz y las columnas de la segunda, por lo que quedaría una matriz de 2x5.

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

y $B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

entonces $A * B = \begin{pmatrix} 23 & -5 & 2 & 5 \\ 15 & 6 & 26 & 39 \end{pmatrix}$