

UNIDAD III.- EXPONENTES Y RADICALES. RAZONES, PROPORCIONES Y VARIACIONES.

Ley asociativa

El producto de tres o más números, es el mismo sin importar la manera en que se agrupan al multiplicarlos.

Ejemplo:

$$abc=(ac)b=c(ab)$$

$$3 \times 2 \times 8 = (3 \times 2)8 = 3(2 \times 8) = 48$$

Ley distributiva

Respecto a la adición.- El producto de un número por la suma de dos o más números es igual a la suma de los productos obtenidos al multiplicar el primero por cada uno de los factores.

Ejemplo:

$$c(a+b)=ca+cb$$

$$4(2+3)=4 \times 2 + 4 \times 3 = 8 + 12 = 20$$

Respecto a la sustracción.- El producto de un número por la diferencia de dos números, es igual a la diferencia de los productos obtenidos al multiplicar el primer número por cada uno de los otros.

Ejemplo:

$$a(b-c)=ab-ac$$

$$3(5-2)=3 \times 3 = 9$$

El producto de dos números de signos iguales es positivo, el producto de dos números de signos contrarios es negativo. El producto de cualquier número multiplicado por cero es igual a cero.

Ejemplo:

$$(-a)(-b)=ab$$

$$(-a)(b)=-ab$$

$$(a)(b)=ab$$

$$(a)(0)=0$$

$$(-2)(-6)=12$$

$$(-2)(6)=-12$$

$$(3)(4)=12$$

$$(6)(0)=0$$

1.- EXPONENTES y RADICALES

- – Leyes de los exponentes.

Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y todo $n, m \in \mathbb{R}$ y bases diferentes de 0 para exponentes negativos o cero.

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

- – Expresiones exponenciales.

POTENCIA. – *Definición:* Llamamos potencia de un número al producto de tomarlo como factor tantas veces como queremos es, pues, una multiplicación en la que los factores son siempre el mismo número.

Ejemplo: exponente

base 4³=64 potencia

Base: Al número que tomaremos como factor, o sea, el 4.

Exponente: Al número que nos indica cuantas veces debemos tomar como factor a la base, el exponente es el 3.

Potencia: Al producto obtenido, es decir, el 64.

El ejemplo de 4³ nos indica que se debe tomar como factor 3 veces al 4, es decir, multiplicar al 4 por si mismo 3 veces.

Ejemplo:

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$$

$$1^a \cdot 2^a \cdot 3^a$$

vez vez vez

REGLAS:

a) La potencia de un número positivo siempre es positivo.

Ejemplo:

$$(8)^2=64$$

$$(3)^3=27$$

b) La potencia de un número negativo siempre es positivo, si el exponente es entero o par.

Ejemplo:

$$(-2)^2=4$$

$$(-2)^4=16$$

c) La potencia de un número negativo es siempre negativo, si el exponente es entero e impar.

Ejemplo:

$$(-3)^5=-243$$

$$(-4)^3=-64$$

d) Todo número elevado al exponente uno o primera potencia, nos da el mismo número.

Ejemplo:

$$1001=100 \quad 51=5 \quad -81=-8$$

e) Todo número con exponente cero es igual a la unidad.

Ejemplo:

$$10000=1 \quad 50310=1 \quad -32000=1$$

División.

Polinomio entre monomio.

El cociente, es la suma de los cocientes que resultan de dividir cada término del polinomio entre el monomio.

Ejemplo:

$$\frac{20a^3b + 25a^4c - 15a^3}{-5a^3} = \frac{20a^3b}{-5a^3} + \frac{25a^4c}{-5a^3} - \frac{15a^3}{-5a^3} = -4b - 5ac + 3a^2$$

Polinomio entre polinomio.

Procedemos en la forma siguiente:

- Ordenamos el dividendo y el divisor según las potencias descendentes de una misma letra que aparezca en ambos.
- Para obtener el primer término del cociente, dividimos el primer término del dividendo entre el primer término del divisor.
- Se multiplica el primer término del cociente por todo el divisor y se resta algebraicamente del dividendo.
- El residuo obtenido, se trata como un nuevo divisor y se repite el procedimiento 2 y 3.
- Se continúa este proceso hasta obtener un residuo en el cual el mayor exponente de la letra que se escogió como base de la ordenación sea menor que el mayor exponente de dicha letra en el divisor.

Ejemplo:

Divida $2y^3+5y^2+2y-1$ entre $y+3$

$2y^2-y+5$

$$y+3 \overline{) 2y^3+5y^2+2y-1}$$

$$\underline{-2y^3 - 6y^2}$$

$$-y^2 + 2y$$

$$\underline{-y^2 + 3y}$$

$$5y-1$$

$$\underline{-5y-15}$$

$$16$$

- – Raíces de los números.

La raíz de una expresión algebraica es toda expresión algebraica que elevada a una potencia reproduce la expresión dada.

Así, $2a$ es raíz cuadrada de $4a^2$ porque $(2a)^2=4a^2$ y $-2a$ también es raíz cuadrada de $4a^2$ porque $(-2a)^2=4a^2$

$3x$ es raíz cúbica de $27x^3$ porque $(3x)^3=27x^3$.

El signo de raíz es $\sqrt{\quad}$

, llamado signo radical. Debajo de este signo se coloca la cantidad a la cual se extrae la raíz, llamada por eso, cantidad subradical.

El signo $\sqrt[n]{\quad}$

, lleva un índice que indica la potencia a que hay que elevar la raíz para que reproduzca la cantidad subradical.

Por convención el índice 2 se suprime y cuando el signo $\sqrt{\quad}$

no lleva índice se entiende que el índice es 2.

$$\sqrt[3]{8x^3}$$

significa una cantidad que elevada al cubo reproduce la cantidad subradical $8x^3$; esta raíz es $2x$ porque $(2x)^3=8x^3$.

$$\sqrt[5]{-32a^5}$$

significa una cantidad que elevada a la quinta potencia reproduce la cantidad subradical $-32a^5$, esta raíz es $-2a$ porque $(-2a)^5 = -32a^5$.

- – Leyes de los radicales.

$$\sqrt[n]{b^n} = b$$

$$\sqrt[n]{ab} = (ab)^{1/n} = a^{1/n} b^{1/n} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Condiciones para la simplificación de radicales

- Todos los factores con potencias enésimas exactas o múltiplos de n , deben eliminarse del radicando.
- El índice del radical debe ser el mínimo posible.
- No debe haber fracciones en el radicando, es decir que su denominador debe ser racionalizado.

- – Multiplicación de radicales

Multiplicación, caso 1.

La operación se efectúa aplicando la ley de radicales B.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

Ejemplo:

$$(2\sqrt[3]{4})(3\sqrt[3]{16}) = (2)(3)\sqrt[3]{4\sqrt[3]{16}} = 6\sqrt[3]{(4)(16)} = 6\sqrt[3]{64} = 6(4) = 24$$

Multiplicación, caso 2.

La operación se efectúa aprovechando el isomorfismo, con los exponentes racionales y sus leyes para cambiar a radicales con índices iguales.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{5}\sqrt{2} = 5^{1/3} * 2^{1/2} = 5^{2/6} * 2^{3/6} = \sqrt[6]{5^2} \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{25 \cdot 8} = \sqrt[6]{200}$$

- – División de radicales.

División, caso 1.

Esta operación se efectúa usando la ley de radicales C.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

y se simplifica usando el teorema $\frac{x}{y} = \frac{x^z}{y^z}$

Ejemplo:

$$\frac{6\sqrt[3]{5}}{2\sqrt[3]{3}} = \frac{6}{2} \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}} = 3 \frac{\sqrt[3]{5 \cdot 3^2}}{3 \cdot 3^2} = 3 \frac{\sqrt[3]{45}}{3} = \sqrt[3]{45}$$

División, caso 2.

Al igual que en la multiplicación buscamos cambiar a radicales con el mismo índice, usando los exponentes racionales.

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{4^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{4^{\frac{2}{6}}}{2^{\frac{3}{6}}} = \sqrt[6]{\frac{16}{8}} = \sqrt[6]{2}$$

- – Racionalización de denominadores.

Racionalizar el denominador. – Racionalizar significa reemplazar la expresión por una equivalente sin radical en donde se indique.

$$\sqrt[3]{\frac{9}{2}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{2}}$$

Ley C.

Se busca un factor (z) al que haga que el radicando en el denominador tenga un exponente múltiplo del índice del radical y usando el teorema $\frac{x}{y} = \frac{x^z}{y^z}$

- – Adición de radicales.

Se dice que 2 o más radicales son semejantes, cuando tienen el mismo índice y el mismo radicando.

La suma algebraica de radicales se reduce a combinar todos los radicales semejantes en un solo término.

Ejemplo:

$$\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{72}$$

Ninguno de estos radicales es semejante, por lo que debemos cambiar su forma y simplificarlos.

$$= \sqrt{9*2} + \sqrt{25*2} - \sqrt{36*2} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$$

$$= (3+5-6)\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

2.- RAZONES, PROPORCIONES Y VARIACIONES.

Razón.

La razón de un número (a) con otro número (b) distinto de cero, es el cociente que resulta dividir (a) entre (b); o sea, razón es el número que resulta de dividir dichos números (r).

$$r = \frac{a}{b}$$

que se lee a es a b.

Ejemplo:

La razón r1, del número 3 al número 4 será:

$$r1 = \frac{3}{4}$$

La razón r2 del número 4 al número 3 es la siguiente:

$$r2 = \frac{4}{3}$$

Las razones r1 y r2 son inversas (o recíprocas). Dos cantidades son recíprocas (o inversas) cuando su producto es igual a la unidad.

Veamos, si esto es cierto, para r1 y r2:

$$r1 * r2 = \frac{3}{4} * \frac{4}{3} = \frac{3}{4} * \frac{4}{3} = 1$$

Ejemplo:

Si un hombre pesa 80 Kg., y su hijo tiene un peso de 40 Kg. ¿Cuántas veces será mayor el peso del hombre, respecto al peso del hijo? Para obtener la respuesta, expresemos la razón del peso del hombre al peso del hijo.

W=peso del hombre=80 Kg.

w=peso del hijo=40 Kg.

$$\frac{W}{w} = \frac{80Kg}{40Kg} = 2$$

$$\text{ó } \frac{W}{w} = 2$$

$$W=2w$$

El peso del hombre es dos veces mayor que el peso del hijo.

Proporción.

Una proporción se define como la igualdad de dos razones.

Si:

$$r1 = \frac{a}{b}$$

$$\text{y } r2 = \frac{c}{d}$$

entonces: $r1=r2$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

es una proporción, que se lee a es a b como c es a d.

Ejemplo:

$$\text{Si: } r1 = \frac{3}{6}$$

$$\text{y } r2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{entonces } \frac{3}{6}$$

$$= \frac{1}{2}$$

es una proporción.

Otra manera de expresar una proporción es como sigue:

$$a:b :: c:d$$

y también se lee a es a b como c es a d.

Las cuatro cantidades que aparecen en una proporción se llaman términos de la proporción.

- El primero y tercer términos se llaman antecedentes.
- El segundo y cuarto términos se llaman consecuentes.

- El primero y cuarto términos se llaman extremos.
- El segundo y tercer términos se llaman medios.

En la proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

a y c son los antecedentes, b y d los consecuentes; a y d son los extremos; b y c los medios.

PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES

Las proporciones tienen las siguientes propiedades.

Si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

es una proporción

entonces:

Propiedad 1. En toda proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos. En símbolos:

$$a \cdot b = b \cdot c$$

Propiedad 2. En toda proporción se puede cambiar los medios, uno por otro, de lo cual resulta otra proporción. O sea:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Propiedad 3. En toda proporción se pueden invertir las razones, de lo cual resulta otra proporción. Esto es:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

Propiedad 4. En toda proporción pueden restarse de los antecedentes sus respectivos consecuentes, de lo cual resulta otra proporción. Realizando la operación propuesta se tiene:

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

Propiedad 5. En toda proporción pueden tomarse a los dos antecedentes sus respectivos consecuentes, de lo cual resulta otra proporción. Esta propiedad se escribe como sigue:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

Propiedad 6. En toda serie de razones iguales la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes, como uno cualquiera de los antecedentes es a su consecuente. Sean las razones iguales:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$$

entonces, según la propiedad enunciada:

$$\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h} = \frac{a}{b}$$

$$\text{ó } \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h} = \frac{c}{d}$$

Variaciones.

Las cantidades que intervienen en una cuestión matemática son constantes cuando tienen un valor fijo y determinados y son variables cuando toman diversos valores.

Variación directa.

Cuando dos variables x, y están relacionadas de tal manera que la razón $\frac{y}{x}$

es igual a una constante (la razón no cambia), decimos que y varía directamente con x. El significado anterior se expresa en símbolos matemáticos de la siguiente manera:

y varía directamente con x, significa que $\frac{y}{x}$

= constante=k

donde:

k se llama constante de proporcionalidad (k≠0)

Puesto que $\frac{y}{x}$

=k, es equivalente a y=kx, las dos ecuaciones:

$$\frac{y}{x}$$

=k ó y=kx

representan una variación directa.

Variación inversa.

Dadas dos cantidades pueden ocurrir que al aumento de una, corresponda una disminución para la otra; o que a toda disminución de una, corresponda un aumento para la otra; entonces se dice que las dos cantidades son inversamente proporcionales

$$a = \frac{1k}{b}$$

donde $k=ab$

Si una varía inversa y proporcionalmente con otra, entonces la primera es igual al producto de una constante por el recíproco de la segunda.

BIBLIOGRAFIA

TEXTO: ALGEBRA

AUTOR: A. BALDOR

EDITORIAL: PUBLICACIONES CULTURAL

TEXTO: ALGEBRA ELEMENTAL

AUTOR: ALFONSO GOBRAN

EDITORIAL: GRUPO EDITORIAL IBEROAMERICA

TEXTO: ALGEBRA ELEMENTAL

AUTOR: GORDON FULLER

EDITORIAL: CIA. EDITORIAL CONTINENTAL, S.A. DE C.V. MEXICO

TEXTO: MATEMATICAS III

AUTOR: HUMBERTO CANTU SALINAS

HECTOR PAZ ESTRADA

EDITORIAL: SEP