

DEFINICIONES (GRUPOS)

Def 1. GRUPOIDE :

$(G, *)$ donde G es un conjunto no vacío y $*$ una operación binaria **cerrada** (**L.C.I**).

Def 2. SEMIGRUPO:

Estructura algebraica de la forma $(S, *)$ donde S un conjunto y $*$ es una operación binaria, **cerrada y asociativa**.

Si además es conmutativo, se llama **Semigrupo Conmutativo** o **Abeliano**.

Def 3. MONOIDE :

$(M, *)$ donde M es un conjunto no vacío y $*$ una operación binaria. *Un Monoide cumple :*

i) *Existe elemento neutro, es decir $\exists e \in M$ tal que $a * e = e * a = a$*

ii) *$*$ es asociativa*

Def 4. GRUPO :

Sea G un conjunto no vacío provisto de una L.C.I* que satisface las siguientes propiedades :

(G1) *$*$ es asociativa, esto es $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$*

(G2) *Existe un elemento $e \in G$ tal que $a * e = e * a, \forall a \in G$ (e se llama elemento neutro para $*$)*

(G3) *Para cada $a \in G$, existe $a^{-1} \in G$ tal que :*

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e \text{ (El elemento } a^{-1} \text{ se llama el inverso de } a)$$

Def 5. GRUPO ABELIANO :

Sea $(G, *)$ un grupo. Si $*$ conmuta es **abeliano**.

Def 6. SUBGRUPO :

Sea $(G, *)$ un grupo, $H \subseteq G, H \neq \emptyset$. Diremos que H es un SUBGRUPO de G si y solo si

$(H, *)$ es un grupo. **Notación :** $H \leq G$

Def 7.

Sean $(G, *)$ un grupo, $k \in \mathbb{Z}^+, \forall a \in G$, definimos :

i) $a^k = a * a * \dots * a, k \text{ veces.}$

ii) $a^0 = e$

iii) $a^{-k} = (a^{-1})^k$

Def 8. CENTRO:

Sea $(G, *)$ un grupo. Se llama CENTRO de G al conjunto:

$$\text{Cent}(G) = \{g \in G : g * x = x * g, \forall x \in G\}$$

Def 9. SUBGRUPO GENERADO:

$$\text{Sea } H = \{a^i : i \in \mathbb{Z}\} \leq G$$

Este subgrupo de G se llama SUBGRUPO GENERADO por a

Def 10. GRUPO CÍCLICO :

$$\text{Sea } H = \{a^i : i \in \mathbb{Z}\} \leq G$$

Si debido a la elección de $a \in G$ se obtiene que $H = G$,

entonces se dice que G es un GRUPO CÍCLICO y el elemento a se llama generador de G .

Notación: $G = \langle a \rangle = \{a^i : i \in \mathbb{Z}\}$

Def 11. GENERADOR de $\langle S \rangle$:

Sean $(G, *)$ un grupo, $S \subseteq G$, $S \neq \emptyset$. El conjunto $\langle S \rangle$

se define como la intersección de todos los subgrupos de G que contienen al conjunto S .

$$\langle S \rangle = \bigcap \{H : H \leq G \wedge S \subseteq H\}$$

Diremos que el conjunto S es el GENERADOR de $\langle S \rangle$.

Def 12. CONGRUENCIA MÓDULO H :

Sea $(G, *)$ un grupo

y $H \leq G$. Definamos en G la siguiente relación :

$$\text{Para } a, b \in G; aRb \Leftrightarrow a * b^{-1} \in H$$

Esta relación en G se llama CONGRUENCIA MÓDULO H .

Notación: $a \equiv b \pmod{H}$

Def 13: CLASES LATERALES:

Sea $(G, *)$ un grupo y $H \leq G$, $a \in G$.

$Ha = \{h * a : h \in H\}$...se llama CLASE LATERAL DERECHA de H en G .

$aH = \{a * h : h \in H\}$...se llama CLASE LATERAL IZQUIERDA de H en G .

Def 14. SUBGRUPO NORMAL:

Sea $(G, *)$ un grupo y $H \leq G$.

Diremos que H es un SUBGRUPO NORMAL de $G \Leftrightarrow \forall g \in G, \forall h \in H, g * h * g^{-1} \in H$

Diremos que H es un SUBGRUPO NORMAL de $G \Leftrightarrow \forall g \in G, Hg = gH$

Notación: $H \trianglelefteq G$

Def 15:

Sean $(G, *)$, $H \trianglelefteq G$.

Definamos $\mathcal{H} = \{aH : a \in G\}$... (Conjunto de todas las clases laterales a izquierda de H en G)

Sea $\otimes : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

$$(aH, bH) \rightarrow aH \otimes bH = \otimes(aH, bH) = (a * b)H$$

$(\mathcal{H}, \otimes)$ es un grupo.

Def 16. GRUPO CUOCIENTE:

Si $(G, *)$ es un grupo y $H \trianglelefteq G$. El grupo $(\mathcal{H}, \otimes)$ se llama GRUPO CUOCIENTE.

Notación : G/H

Def 17. GRUPO SIMPLE:

Todo grupo que no tiene subgrupos propios normales, se llama GRUPO SIMPLE.

Def 18. HOMOMORFISMO :

Sean $(G_1, *)$ y $(G_2, \circ)$ dos grupos.

Una aplicación $\phi : (G_1, *) \rightarrow (G_2, \circ)$ se llama un HOMOMORFISMO,

si para $a, b \in G_1$ se tiene $\phi(a * b) = \phi(a) \circ \phi(b)$.

Notación : $G_1 \sim G_2$

Def 19. NÚCLEO de ϕ :

Sea $\phi : (G_1, *) \rightarrow (G_2, \circ)$ un homomorfismo, se llama NÚCLEO de ϕ al conjunto

$$K_\phi = \{x \in G_1 : \phi(x) = e_2, \text{ con } e_2 \text{ la unidad de } G_2\}$$

Def 20. ISOMORFISMO:

Un homomorfismo $\phi : (G_1, *) \rightarrow (G_2, \circ)$ se dice un ISOMORFISMO

si ϕ es biyectiva.

Dos grupos G_1 y G_2 se dirán ISOMORFOS si hay un isomorfismo $\phi : G_1 \rightarrow G_2$.

Notación : $G_1 \cong G_2$

Def 21. AUTOMORFISMO :

Todo isomorfismo de un grupo G sobre si mismo, se llama un AUTOMORFISMO.