Determinantes

DEFINICIONES:

Sea $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz de 2×2. Se define el determinante de A por:

$$\boxed{\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \qquad (1)$$

Con frecuencia se denotará det A por:

$$|A| \qquad \text{o} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Observación: No debe confundirse esta notación con las barras de valor absoluto. $|A|$ denota det A es una matriz cuadrada. $|x|$ denota el valor absoluto de x si x es un número real o complejo.

DEFINICIÓN 1: Determinantes de 3×3. Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Entonces

$$\boxed{\det A = |A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}} \qquad (3)$$

Observe el signo menos antes el segundo término.

Ejemplo 1: Cálculo de un determinante de 3×3.

- Sea $A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$. Calcule $|A|$.

Solución: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 3 \cdot 2 - 5 \cdot 19 + 2 \cdot 10 = -69$

Existe otro método para calcular determinantes de 3×3. De la ecuación (3) se tiene

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

O sea

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} \qquad (4)$$

Se escribe A y se le adjuntan las primeras dos columnas:

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right. & \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\right. \\ & & + & + & + \end{array}$$

Después se calculan los seis productos, poniendo signo menos antes de los productos con flechas hacia arriba, y se suman todos. Esto da la suma de la ecuación (4).
(Este método es denominado método de Sarrus).

Ejemplo 2: Cálculo de un determinante de 3×3 usando el nuevo método.

Calcule $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ usando el nuevo método.

Solución: Al escribir $\left|\begin{matrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{matrix}$ y multiplicar como lo indican las flechas se

obtiene $|A|$ =(3)(2)(4) + (5)(3)(-1) + (2)(4)(2) – (-1)(2)(2) – (2)(3)(3) – (4)(4)(5)
=24 - 15 + 16 + 4 – 18 – 80 = - 69

Advertencia: Este método no funciona para determinantes de $n \times n$ si n >3. Si intenta algo similar para determinantes de 4×4 o de orden mayor, obtendrá una respuesta equivocada.

Antes de definir los determinantes de $n \times n$, debe observarse que en la ecuación (3)

$\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es la matriz obtenida al eliminar el primer renglón y la primera columna de A

$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$ es la matriz obtenida al eliminar el primer renglón y la segunda columna de A, y

$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ es la matriz obtenida al eliminar el primer renglón y la tercera columna de A. Si estas matrices se denotan por M_{11}, M_{12} y M_{13}, respectivamente, y si $A_{11} = \det M_{11}$, $A_{12} = -\det M_{12}$ y $A_{13} = \det M_{13}$, entonces la ecuación se puede escribir como

$$\boxed{\det A = |A| = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}} \qquad (5)$$

DEFINICIÓN 2: Menor

Sea A una matriz de $n \times n$ y sea M_{ij} la matriz de $(n-1) \times (n-1)$ obtenida de A eliminando el renglón i y la columna j. M_{ij} se llama el **menor *ij*** de A.

Ejemplo 3: Calculo de dos menores de una matriz de 3×3. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Encuentre M_{13} y M_{32}.

Solución: Eliminando el primer renglón y la tercera columna de A se obtiene M_{13} = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. De manera similar, si se elimina el tercer renglón y la segunda columna se obtiene $M_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

DEFINICIÓN 3: Cofactor Sea A una matriz de $n \times n$. El **cofactor *ij*** de A, denotado por A_{ij}, está dado por

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|} \qquad (6)$$

Esto es, el cofactor *ij* de A se obtiene tomando el determinante el menor *ij* y multiplicándolo por $(-1)^{i+j}$.

Ejemplo 4: Cálculo de dos factores de una matriz de 4×4. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 9 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Se tiene $A_{32} = (-1)^{3+2}\left|M_{32}\right| = - \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -8$

$$A_{24} = (-1)^{2+4}\left|M_{24}\right| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -192$$

Ahora se considerará la matriz general de $n \times n$. Aquí

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

DEFINICIÓN 4: Determinante $n \times n$ Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces el determinante de A, denotado por det A o $|A|$, está dado por

$$\boxed{\begin{aligned} \det A = |A| &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \ldots + a_{1n}A_{1n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} \end{aligned}} \quad (8)$$

La expresión en el lado derecho de (8) se llama **expansión por cofactores.**

Observación. En la ecuación (8) se define el determinante mediante la expansión por cofactores en el primer renglón de A.
Observación. En una matriz triangular, superior o inferior, su determinante es la multiplicación de los componentes de la diagonal principal.

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

- En determinante de una matriz A es igual al de su traspuesta:

  $\det(A) = \det(A^t)$

- Si B es la matriz cuadrada que se obtiene intercambiando dos filas o columnas cualesquiera de la matriz A, el determinante de B es el opuesto del determinante de A:

  $\det(B) = -\det(A)$

- El determinante de una matriz cuadrada A con dos filas o columnas iguales es nulo:

  $\det(A) = 0$

- Si B es la matriz cuadrada que se obtiene de la matriz cuadrada A, al multiplicar por una constante k, el determinante de B es igual al producto de k por el de A:

  $\det(B) = k \cdot \det(A)$

- Si la matriz cuadrada A tiene una fila o columna de ceros su determinante es nulo:

$\det(A) = 0$

- Si B es la matriz cuadrada que se obtiene de la matriz cuadrada A, sustituyendo una fila (columna) por ella más k veces otra fila (columna), el determinante de B es igual al determinante de A:

  $$\det(B) = \det(A)$$

- Si la fila (columna) j-ésima de una matriz cuadrada A es la suma de las j-ésimas filas (columnas) de las matrices cuadradas B y C, el determinante de A es la suma de los de B y C:

  $$\det(A) = \det(B) + \det(C)$$

- Si B es la matriz cuadrada que se obtiene de la matriz cuadrada A, al sumar una de sus filas (columnas) de una combinación lineal de otras filas (columnas), el determinante de B es igual al de A:

  $$\det(B) = \det(A)$$

- Sean A y B dos matrices cuadradas el determinante de la matriz producto A·B es el producto de sus determinantes:

  $$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$