7. PRINCIPALES COMANDOS DE DERIVE-5 PARA EL ÁLGEBRA LINEAL.

En este apartado vamos a introducir las principales operaciones que DERIVE realiza en el cálculo vectorial y cálculo matricial.

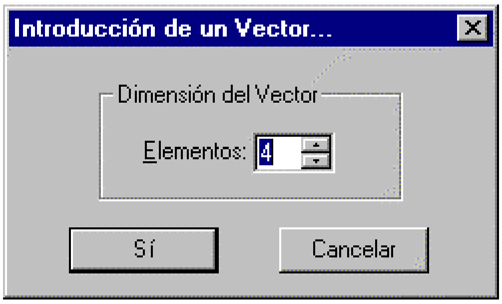
7.1. VECTORES Y MATRICES EN DERIVE.

- **Declaración de vectores en DERIVE.**

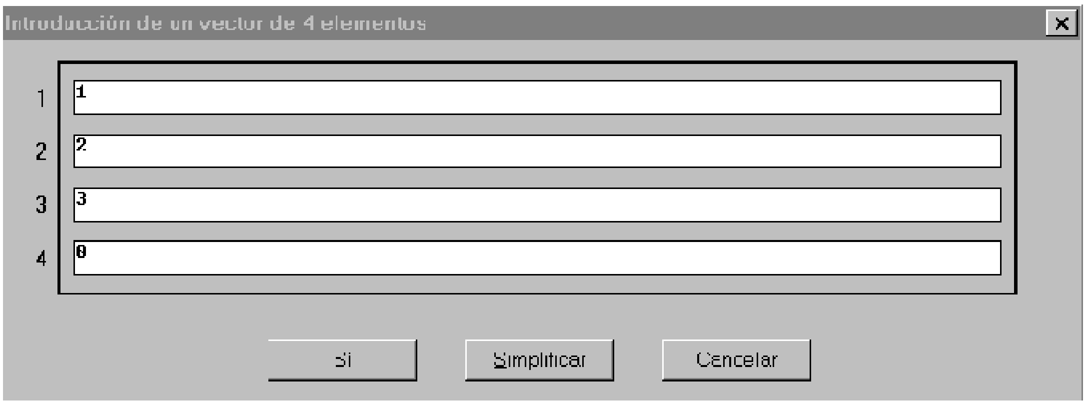
En DERIVE los vectores se pueden introducir de dos formas distintas:

(a) mediante la secuencia de comandos *Editar(Autor)-Vector*
EJEMPLO
Definir utilizando *Editar(Autor)-Vector* el vector de componentes (1,2,3,8)

Solución:
Aplicamos el comando *Editar(Autor)-Vector* , en el campo dimensión indicamos el número de elementos del vector, en este caso "4"



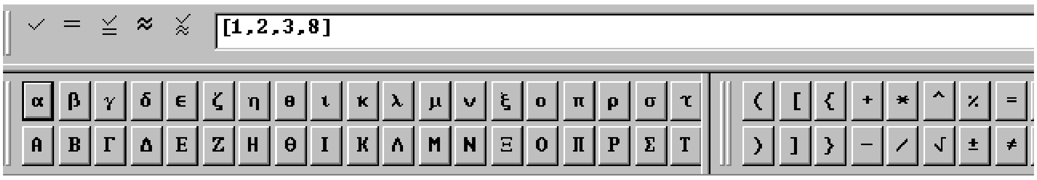
pulsamos (enter) o pinchamos en Si y luego vamos introduciendo una a una las componentes del vector pulsando la tecla del Tabulador después de escribir cada una de ellas



al final resulta la expresión

[1, 2, 3, 8]

(b) introduciendo directamente el vector con *Editar(Autor)-Expresión:*



obtenemos la misma expresión anterior.

<u>EJEMPLO 7.1.</u>
Editar los vectores: (3,4,5,7), (1,6,9,-10) y (9,2,3,1).

<u>Solución:</u>
Con *Editar(Autor)-Expresión* introducimos

[3, 4, 5, 7]

[1, 6, 9, -10]

[9, 2, 3, 1]

- **Declaración de matrices en DERIVE.**

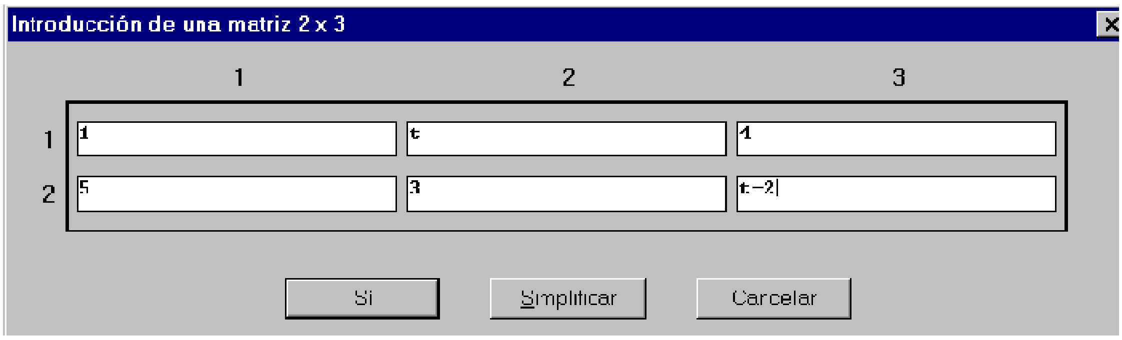
En DERIVE las matrices se pueden definir de dos formas:

(a) Mediante la secuencia de comandos *Editar(Autor)-Matriz*
(b) Empleando el comando *Editar(Autor)*, es decir editando directamente.

<u>EJEMPLO 7.2.</u>
Editar la matriz $\begin{pmatrix} 1 & t & 4 \\ 5 & 3 & t-2 \end{pmatrix}$ utilizando los dos métodos anteriores.

<u>Solución</u>:
(a) Aplicamos la secuencia *Editar(Autor)-Matriz* , DERIVE nos pregunta sobre el número de filas y columnas de la matriz, en este caso indicamos que tiene 2 filas y 3 columnas

a continuación iremos introduciendo los elementos de la matriz. Para introducir los diferentes elementos de la matriz podemos utilizar la tecla de tabulación para irnos moviendo de una casilla a otra. Podemos asimismo observar que en la parte inferior de la línea de edición nos indica el elemento que estamos introduciendo



al finalizar aparece en la ventana de álgebra la expresión

$$\begin{bmatrix} 1 & t & 4 \\ 5 & 3 & t-2 \end{bmatrix}$$

(b) El segundo método consiste en editar la matriz como un vector de vectores fila. En consecuencia editando

y al pulsar (enter) obtenemos nuevamente la expresión anterior.

- **Dar nombre a un vector o a una matriz.**

En general, lo más operativo en álgebra matricial suele ser el dar nombre a la matriz o vector que hemos introducido utilizando la sintaxis:

(Nombre de vector o matriz) := (matriz o vector)

<u>EJEMPLO 7.3</u>.
Definir los vectores u=(3,5,6,-3) , v=(4,3,-9,-8).

<u>Solución</u>.
Para editar directamente vectores en DERIVE basta con introducir las componentes entre corchetes, así para editar el primer vector introducimos la expresión

"u:=[3,5,6,-3]"

el segundo se obtiene escribiendo

"v:=[4,3,-9,-8]"

lo cual en DERIVE se muestra como

```
u := [3, 5, 6, -3]

v := [4, 3, -9, -8]
```

<u>EJEMPLO 7.4</u>.
Definir en DERIVE las matrices cuadradas dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Editemos las expresiones

resultando así en la ventana de álgebra

$$a := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

7.2. OPERACIONES CON VECTORES.

Dados dos vectores u, v definidos en DERIVE, con ciertos valores numéricos o funcionales según hemos comentado en el apartado anterior, las siguientes operaciones se obtienen editando las expresiones indicadas y simplificando a continuación para obtener el resultado:

(a) SUMA Y DIFERENCIA DE VECTORES “u+v” ó “u-v”
(b) PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES “u.v”
(c) NORMA DE UN VECTOR “abs(u)”
(d) DIMENSION DE UN VECTOR “dimension(u)”
(e) PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR “a* u” (a es escalar)
(f) EXTRAER EL ELEMENTO K-ESIMO DE UN VECTOR “element(u,k)”
(g) AÑADIR ELEMENTOS A UN VECTOR “append(u,v)” , su resultado es un vector que contiene todas las componentes de u y a continuación las de v.

EJEMPLO 7.5.

Dados los vectores $\overline{u} = (1,3,4,-9)$ y $\overline{v} = (2,0,3,4)$. Calcular

(a) $\overline{u} + \overline{v}$
(b) $\overline{u} - \overline{v}$
(c) $\overline{u}.\overline{v}$
(d) Calcular la norma de ambos vectores.
(e) $3\overline{u} - 5\overline{v}$
(f) Extraer la tercera componente del vector $\overline{u}$
(g) Añadir a los elementos de $\overline{u}$ los de $\overline{v}$.

Solución.

En primer lugar, definamos los vectores del problema escribiendo las expresiones

“u:=[1,3,4,-9]” y “v:=[2,0,3,4]”

(a) La suma se obtiene editando “u+v” y simplificando

u + v

[3, 3, 7, -5]

(b) La diferencia se calcula editando “u-v” de tal forma que al simplificar resulta

u − v

[-1, 3, 1, -13]

(c) El producto escalar se obtiene mediante “u.v”

u · v

-22

(d) La norma del vector u se obtiene editando y simplificando “abs(u)”

|u|

√107

de igual forma se calcula la norma de v

|v|

√29

(e) Editando “3u-5v”, al simplificar se obtiene el vector deseado

3·u − 5·v

[-7, 9, -3, -47]

(f) Mediante la edición de *“*element(u,3)*”* tras simplificar resulta

ELEMENT(u, 3)

4

(g) Aplicamos el comando *Editar(Autor)* e introducimos la expresión *“*append(u,v)” que al simplificar nos da

APPEND(u, v)

[1, 3, 4, -9, 2, 0, 3, 4]

7.3. OPERACIONES CON MATRICES.

Dadas dos matrices A y B, en DERIVE se pueden realizar las siguientes operaciones, sin más que editar la expresión indicada y simplificar:

(a) SUMA DE DOS MATRICES “A+B”
(b) DIFERENCIA DE DOS MATRICES “A-B”
(c) PRODUCTO DE MATRICES “A.B”
(d) TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ “A`” ¡ojo es el acento grave `! (este símbolo se puede introducir o bien a través del teclado o bien a través de los símbolos que aparecen en la ventana de edición `)
(e) PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR “α.A”
(f) DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA “det(A)”
(g) TRAZA DE UNA MATRIZ CUADRADA “trace(A)”
(h) INVERSA DE UNA MATRIZ NO SINGULAR “A^(-1)”
(i) INTRODUCCION DE MATRIZ IDENTIDAD DIMENSION N

“identity_matrix(n)”

(j) EXTRAER EL ELEMENTO a_{ij} DE UNA MATRIZ "element(A,i,j)"
(k) EXTRAER LA FILA J-ESIMA DE UNA MATRIZ "element(A,j)"
(l) AÑADIR UNA FILA A UNA MATRIZ "append(A,matriz fila)"
(m) MATRIZ REDUCIDA DE GAUSS-JORDAN "row_reduce(A)"
(n) MATRIZ REDUCIDA DE LA MATRIZ A AUMENTADA POR B
"row_reduce(A,matriz B)"
(o) POTENCIA N-ESIMA "A^n"

EJEMPLO 7.6.

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ 0 & 2 & 3\\ 5 & 9 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 2\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}$

Calcular si es posible:

(a) A+B, A-B, A+C.
(b) AB, BA, AC, CA
(c) C^tA
(d) 3 A-4BC, 2AC+ ½ BC
(e) det(A), det(B), det(C)
(f) A^{-1}, B^{-1}
(g) Comprobar que A.Id=A
(h) tr(A), tr(B)
(i) Efectuar $3\ a_{12}-5a_{13}$,
(j) Obtener la matriz reducida de Gauss-Jordan de A y de B
(k) Calcular la inversa de A utilizando el cálculo de matriz reducida de Gauss-Jordan
(l) A^3, B^4

Solución.

En primer lugar definimos las tres matrices

$$a := \begin{bmatrix}1 & 3 & -5\\ 0 & 2 & 3\\ 5 & 9 & 1\end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix}6 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 2\\ 7 & 6 & 5\end{bmatrix}$$

$$c := \begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\\ 3 & 5\end{bmatrix}$$

(a) Editando las expresiones "A+B", "A-B" al simplificar se obtiene a + b

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 & -2 \\ 1 & 6 & 5 \\ 12 & 15 & 6 \end{bmatrix}$$

a − b

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 & -8 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

por último si editamos y simplificamos "A+C" resulta

a + c

[[2, 3] + [1, 3, -5], [1, 4] + [0, 2, 3], [5, 9, 1] + [3, 5]]

que no es una expresión matricial, ya que A y C son matrices con distinto orden y por tanto no se pueden sumar.

(b) Si se edita "A.B" resulta

a · b

$$\begin{bmatrix} -26 & -16 & -16 \\ 23 & 26 & 19 \\ 46 & 52 & 38 \end{bmatrix}$$

Editando "B.A" al simplificar se obtiene

b · a

$$\begin{bmatrix} 21 & 49 & -21 \\ 11 & 29 & 9 \\ 32 & 78 & -12 \end{bmatrix}$$

de donde se deduce que el producto de matrices NO ES CONMUTATIVO.

De igual forma se procede con las expresiones "A.C" y "C.A"

a · c

$$\begin{bmatrix} -10 & -10 \\ 11 & 23 \\ 22 & 56 \end{bmatrix}$$

c · a

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

C.A no se puede calcular como se muestra en la última expresión.

(c) Efectuamos

$c` \cdot a$

$$\begin{bmatrix} 17 & 35 & -4 \\ 28 & 62 & 2 \end{bmatrix}$$

(d) La operación a desarrollar es

$3 \cdot a - 4 \cdot b \cdot c$

[[-92, -164] + [3, 9, -15], [-48, -116] + [0, 6, 9], [-140, -280] + [15, 27, 3]]

que como se observa no se puede realizar. Sin embargo, si se puede calcular

$$2 \cdot a \cdot c + \frac{1}{2} \cdot b \cdot c$$

cuyo resultado es

$$\begin{bmatrix} -\frac{17}{2} & \frac{1}{2} \\ 28 & \frac{121}{2} \\ \frac{123}{2} & 147 \end{bmatrix}$$

(e) Una posible forma de obtener el resultado de operaciones es, en vez de editar y luego simplificar, introducir la expresión seguida de un “=” y al pulsar (enter) se efectua la operación indicada. Así, si editamos

al pulsar (enter) se obtiene

$$\text{DET}(a) = 70$$

Utilizando este método se obtiene

$$\text{DET}(b) = 0$$

$$\text{DET}(c) = \text{DET} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que no se ha podido calcular el determinante de C, ya que no es una matriz cuadrada.

(f) Editando “A^(-1)=” resulta

$$a^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{14} & -\frac{24}{35} & \frac{19}{70} \\ \frac{3}{14} & \frac{13}{35} & -\frac{3}{70} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{35} & \frac{1}{35} \end{bmatrix}$$

La inversa de B no se puede calcular puesto que como hemos visto en el apartado anterior es una matriz singular y, por ello, no tiene inversa.

(g) La matriz identidad de orden 3 se edita con la expresión "identity_matrix(3)", por tanto la comprobación de la igualdad planteada se obtiene introduciendo

"A.identity_matrix(3)=" (enter)

$$a \cdot \mathrm{IDENTITY\_MATRIX}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

que es la matriz A.

(h) Procediendo como en apartados anteriores se obtiene

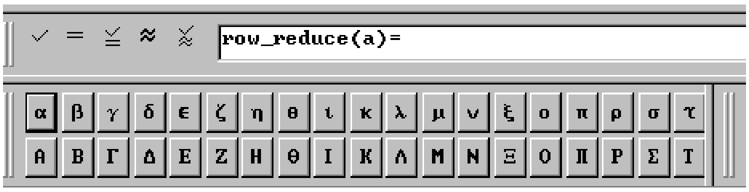
$$\mathrm{TRACE}(a) = 4$$

$$\mathrm{TRACE}(b) = 15$$

(i) Editando "3*element(A,1,2) – 5*element(A,1,3)=" (enter) o Si, resulta

$$3 \cdot \mathrm{ELEMENT}(a, 1, 2) - 5 \cdot \mathrm{ELEMENT}(a, 1, 3) = 34$$

(j) La matriz reducida de Gauss-Jordan de A se obtiene con



$$\mathrm{ROW\_REDUCE}(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y la matriz de Gauss-Jordan de B mediante

$$\mathrm{ROW\_REDUCE}(b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{11} \\ 0 & 1 & \frac{9}{22} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como la matriz A es invertible, su matriz reducida resulta ser la matriz identidad, hecho que no sucede con B, al ser una matriz singular.

(k) El proceso de Gauss-Jordan, puede servirnos para calcular la inversa de una matriz, para ello bastará con construir una matriz formada en la subcaja izquierda por la matriz a invertir y en la subcaja derecha por la matriz identidad del orden correspondiente, de esta forma si editamos

"row_reduce(A,identity_matrix(3))="

al pulsar (enter) se obtiene

$$\mathrm{ROW\_REDUCE(a,\ IDENTITY\_MATRIX(3))} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{14} & -\frac{24}{35} & \frac{19}{70} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{14} & \frac{13}{35} & -\frac{3}{70} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{35} & \frac{1}{35} \end{bmatrix}$$

que es una matriz que tiene en la subcaja de la izquierda la matriz identidad (si la matriz inicial es invertible) y en la subcaja de la derecha su inversa.

Obsérvese lo que sucede si intentamos lo mismo con la matriz B que no tiene inversa:

$$\mathrm{ROW\_REDUCE(b,\ IDENTITY\_MATRIX(3))} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{11} & 0 & -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 1 & \frac{9}{22} & 0 & \frac{7}{22} & -\frac{1}{22} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(l) Por el mismo procedimiento que en apartados anteriores los cálculos se realizan editando las expresiones correspondientes y se obtienen las expresiones

$$a^3 = \begin{bmatrix} -29 & -153 & 11 \\ 60 & 188 & 27 \\ 25 & 141 & 79 \end{bmatrix}$$

$$b^4 = \begin{bmatrix} 7464 & 5898 & 5127 \\ 3879 & 3240 & 2736 \\ 11343 & 9138 & 7863 \end{bmatrix}$$

7.4. FUNCIONES DEFINIDAS EN FICHEROS DE UTILIDADES.

En DERIVE existen ficheros que contienen definiciones de funciones que únicamente pueden utilizarse si está cargado el fichero de utilidades correspondiente. Uno de los más utilizados de álgebra es el VECTOR.MTH. En este archivo, tenemos varias operaciones predefinidas entre las que destacaremos las siguientes:

(a) CALCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ A: “rank(A)”
(b) ADJUNTA DE UNA MATRIZ CUADRADA: “adjoint(A)”
(matriz de adjuntos transpuesta)
(c) ELIMINAR UNA FILA DE UNA MATRIZ A: “delete_element(A,k)”

(NOTA: como VECTOR.MTH es un fichero de utilidades colgado en el directorio de utilidades del programa, es posible utilizar funciones del fichero sin necesidad de tener que cargar el mismo, esto no sucede cuando creamos ficheros de utilidades propios, como es el caso del fichero ALGEBRA.MTH, creado por nosotros. Por norma general y para facilitar el trabajo siempre cargaremos los ficheros de utilidades mediante la secuencia que describimos a continuación).

Asimismo, en el fichero de utilidades ALGEBRA.MTH podremos encontrar las funciones que calculan

(d) PRODUCTO DE KRONECKER DE DOS MATRICES: "prod_kronecker(A,B)"
(e) CLASIFICACION DE UNA MATRIZ CUADRADA "tipo_matriz(A)"

Se ilustran algunas de estas funciones en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO.

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ 0 & 2 & 3\\ 5 & 9 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 2\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}$. Calcular:

(a) El rango de cada una de ellas.
(b) La inversa de las matrices no singulares utilizando la fórmula de la adjunta.
(c) Construir una matriz que contiene las dos primeras columnas de la matriz A y las dos últimas de la matriz B utilizando las funciones delete_element y append.
(d) Obtener Kronecker(A,C)
(e) Determinar el tipo de matriz de A, B y C.

Solución:

En primer lugar debemos editar las tres matrices

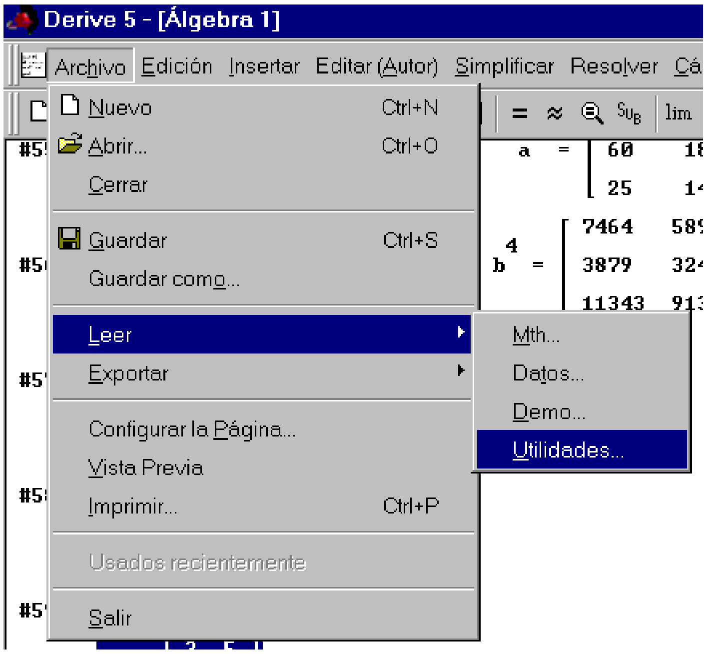
$$a := \begin{bmatrix}1 & 3 & -5\\ 0 & 2 & 3\\ 5 & 9 & 1\end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix}6 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 2\\ 7 & 6 & 5\end{bmatrix}$$

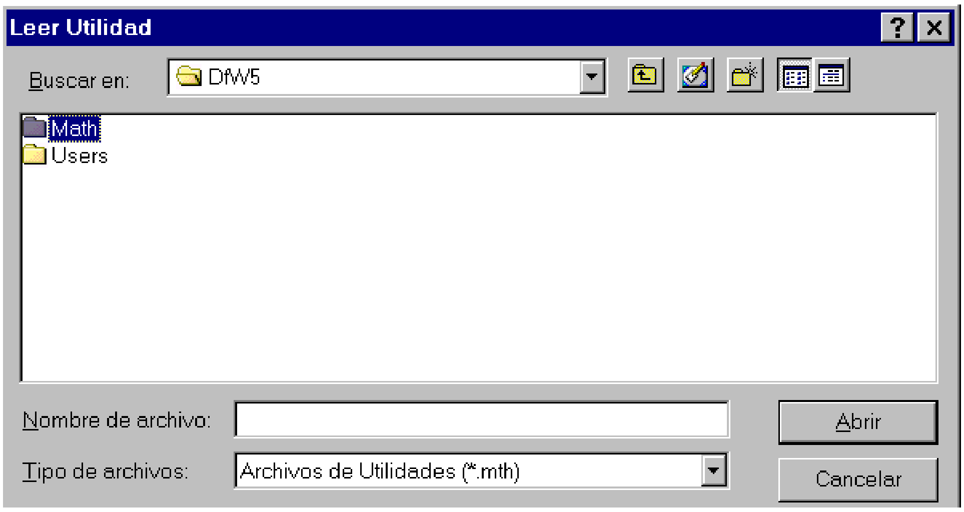
$$c := \begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\\ 3 & 5\end{bmatrix}$$

A continuación procederemos a resolver cada uno de los apartados.

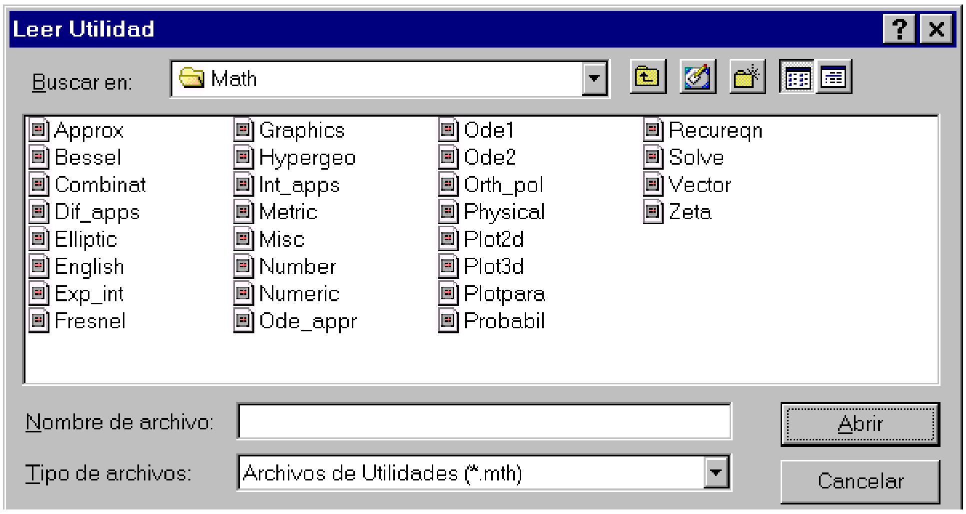
(a) Para obtener el rango podemos optar por aplicar la función RANK, que se encuentra en el fichero de utilidades VECTOR.MTH, en cuyo caso deberemos cargarlo previamente mediante la secuencia de comandos *Archivo-Leer-Utilidades*



tras lo cual aparece una ventana en la que debemos buscar el subdirectorio MATH



y una vez seleccionado este directorio, podemos elegir el fichero Vector, o bien escribir directamente su nombre en "Nombre de archivo:"



Podemos observar que aparece una expresión en DERIVE que nos indica la operación que hemos realizado:

LOAD(C:\DfW5\Math\Vector.mth)

A continuación editamos las expresiones

“rank(A)=” (enter)
“rank(B)=” (enter)
“rank(C)=” (enter)

y se obtiene

RANK(a) = 3

RANK(b) = 2

RANK(c) = 2

(b) De las tres matrices anteriores únicamente es no singular y cuadrada la matriz A por consiguiente es la única que podemos invertir. La matriz inversa de A calculada a partir de la matriz adjunta se obtiene editando la expresión

“(1/det(A)).ADJOINT(A)” (enter)

y resulta

$$\frac{1}{\mathrm{DET(a)}} \cdot \mathrm{ADJOINT(a)}$$

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{5}{14} & -\dfrac{24}{35} & \dfrac{19}{70} \\ \dfrac{3}{14} & \dfrac{13}{35} & -\dfrac{3}{70} \\ -\dfrac{1}{7} & \dfrac{3}{35} & \dfrac{1}{35} \end{bmatrix}$$

(c) La función “delete_element(A,k)” da lugar a una matriz a la que hemos eliminado la fila k-ésima. Como deseamos eliminar columnas, deberemos de eliminar filas de su transpuesta y luego transponer, es decir , con

delete_element(A`,k)`

borramos la k-ésima columna de la matriz A. En consecuencia la operación que debemos considerar para suprimir la última columna de A es construir la matriz A1 editando

“A1:=delete_element(A`,3)`”

`a1 := DELETE_ELEMENT(a`, 3)``

Aplicando = podemos comprobar que es la submatriz de A que buscamos

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Por otro lado como deseamos tan solo las dos últimas columnas de B, definimos B1 editando la expresión

“B1:=delete_element(B`,1)`”

`b1 := DELETE_ELEMENT(b`, 1)``

nuevamente simplificando comprobamos que B1 esta formada por las dos últimas columnas de la matriz B

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Por último como deseamos construir una matriz formada por las columnas de las matrices A1 y B1, editamos

“append(A1`,B1`)`=” (enter)

y resulta

$$\text{APPEND(a1`, b1`)`} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 9 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

(d) Para aplicar la función “prod_kronecker(A,C)”, necesitamos cargar el fichero de utilidades ALGEBRA.MTH. Una vez disponible en memoria editando la expresión “prod_kronecker(A,C)=” resulta

$$\text{PROD\_KRONECKER(a, c)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 9 & -10 & -15 \\ 1 & 4 & 3 & 12 & -5 & -20 \\ 3 & 5 & 9 & 15 & -15 & -25 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 10 & 9 & 15 \\ 10 & 15 & 18 & 27 & 2 & 3 \\ 5 & 20 & 9 & 36 & 1 & 4 \\ 15 & 25 & 27 & 45 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

(e) Para clasificar matrices tenemos definida en el fichero ALGEBRA.MTH una función que clasifica una matriz cualquiera, la función en cuestión se edita “tipo_matriz(nombre de la matriz)” , y después de simplificar se obtiene

```
TIPO_MATRIZ(a)

[no es matriz triangular, no es matriz diagonal, no es matriz simétrica, no es matriz
 antisimétrica, no es matriz ortogonal, no es matriz idempotente, no es matriz
 unipotente, no es matriz nilpotente, no es matriz positiva, no es estocastica, no es
 doblemente estocastica]
```

es decir, A no es una matriz clasificable dentro de los tipos de matrices fundamentales. Este hecho se puede comprobar de forma visual en algunos casos y de forma experimental en otros.

Lo mismos hacemos para la matriz B, editamos "tipo_matriz(B)" y al simplificar resulta

```
TIPO_MATRIZ(b)

[no es matriz triangular, no es matriz diagonal, no es matriz simétrica, no es matriz
 antisimétrica, no es matriz ortogonal, no es matriz idempotente, no es matriz
```

que únicamente es una matriz POSITIVA.

Por último con la matriz C, de forma similar se obtiene

```
TIPO_MATRIZ(c)

esta matriz no es cuadrada
```

EJERCICIO 41.

Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}4&7&9\\6&2&9\\4&9&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}5&0&4\\0&2&2\\7&3&2\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&9\\5&10&21\end{pmatrix}$$

Calcular:

a) A+B;
b) A^2-B^2
c) $A^{-1}.B^t$
d) Determinante de A
e) C^{-1} y comentar el resultado.

EJERCICIO 42.

Utilizando la función VECTOR definir un vector tal que sus elementos son los cubos de los 7 primeros números naturales.

EJERCICIO 43.

Dados los vectores $\overline{u}=(1,3,4,0)$, $\overline{v}=(2,0,1,-1)$.

(a) Determinar si el vector $3\overline{u}-4\overline{v}$ es perpendicular con el vector $\overline{u}$.
(b) ¿Es un vector unitario?

EJERCICIO 44.

Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Se pide

(a) Determinar su rango.
(b) Calcular su inversa, si es posible, utilizando el método de Gauss-Jordan.
(c) Calcular el producto de Kronecker de esta matriz M, por la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ y comprobar que no es conmutativo.

EJERCICIO 45.

Dada la matriz cuadrada

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 2-a & 2a-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

a) Obtener para qué valores de "a" el rango es máximo.
b) Calcular su inversa para a=0.